第 24 卷 第 4 期 广东石油化工学院学报 Vol. 24 No. 4
2014 年 8 月 Journal of Guangdong University of Petrochemical Technology August 2014

Mersenne 数的 Smarandache 函数值的下界*

梁明

(广东石油化工学院 数学系,广东 茂名 525000)

摘要:设 p 是奇素数,运用初等方法讨论了 $S(2^p \pm 1)$ 的下界,其中 $S(2^p \pm 1)$ 是 $2^p \pm 1$ 的 Smarandache 函数。文章证明了:当 $p>7$ 时,$S(2^p \pm 1) \geqslant 8p+1$。

关键词:Mersenne 数;Smarandache 函数;下界
中图分类号:O156.4 文献标识码:A 文章编号:2095-2562(2014)04-0047-04

设 N 是全体正整数的集合。对于正整数 n,设

$$S(n) = \min\{m \mid m! \equiv 0 (\bmod n)\}, m \in N\} \tag{1}$$

称为 n 的 Smarandache 函数。近几年来,关于此类数论及其推广形式的各种性质可谓是一个引人关注的研究课题[1-7]。

设 p 是奇素数,本文讨论 Smarandache 函数值 $S(2^p \pm 1)$ 的下界。对此,文[8]证明了

$$S(2^{p-1}(2^p-1)) \geqslant 2p+1 \tag{2}$$

文[9]证明了,当 $p \geqslant 7$ 时,

$$S(2^p \pm 1) \geqslant 6p+1 \tag{3}$$

本文运用初等方法证明了以下的结果:

定理 当 $p>7$ 时,$S(2^p \pm 1) \geqslant 8p+1$。

由于从文[8]可知 $S(2^{p-1}(2^p-1)) = S(2^p-1)$,所以本文定理改进了文[8]和[9]中的结果(2)和(3)。

1 若干引理

设 p,q 是奇素数。对于大于 1 的正整数 n,设 $p(n)$ 是 n 的最大素因数。

引理 2.1 如果 2 是模 q 的二次剩余,则 $q \equiv 1$ 或 $7 (\bmod 8)$;如果 -2 是模 q 的二次剩余,那么 $q \equiv 1$ 或 $3 (\bmod 8)$。

证明 参见文[10]的定理 3.1.3,3.2.1 和 3.2.3。

引理 2.2 设 X 和 Y 是适合 $|XY|>1$ 以及 $\gcd(X,Y)=1$ 的整数,此时,$(X^p-Y^p)/(X-Y)$ 的素因数 q 满足 $q=p$ 或者 $q \equiv 1$ 或 $q \equiv 1 (\bmod 2p)$,而且 $q=p$ 成立的充要条件是 $X \equiv Y (\bmod p)$。

证明 参见文[11]。

引理 2.3 2^p-1 的素因数 q 都可表成 $q=8sp+1$ 或者

$$a = \begin{cases} (8s-2)p+1, \text{当 } p \equiv 1 (\bmod 4) \text{ 时} \\ (8s-6)p+1, \text{当 } p \equiv 3 (\bmod 4) \text{ 时} \end{cases} \tag{4}$$

式中:s 是正整数。

证明 因为 $2-1=1$,所以从引理 2.2 可知 2^p-1 的素因数 q 都满足 $q \equiv 1 (\bmod 2p)$,故有

$$q = 2tp+1, t \in N, \tag{5}$$

* 收稿日期:2014-04-08;修回日期:2014-05-25
作者简介:梁明(1964—),男,广东化州人,讲师,主要从事数论研究。

又因,$2p\equiv 2(2^{(p-1)/2})^2\equiv 1(\bmod q)$,所以 2 是模 q 的二次剩余,从引理 2.1 得 $q\equiv 1$ 或 $7(\bmod 8)$。

当 $q\equiv 1(\bmod 8)$ 时,从式(5)可知 $4\mid t$,故有 $t=4s$,其中 s 是正整数。因此 $q=8sp+1$。

当 $q\equiv 7(\bmod 8)$ 时,从式(5)可知

$$tp\equiv 3(\bmod 4) \tag{6}$$

故从式(6)可得

$$t=\begin{cases}3(\bmod 4),\text{当 } p\equiv 1(\bmod 4)\text{ 时}\\ 1(\bmod 4),\text{当 } p\equiv 3(\bmod 4)\text{ 时}\end{cases} \tag{7}$$

由于从式(7)可知

$$t=\begin{cases}4s-1,\text{当 } p\equiv 1(\bmod 4)\text{ 时}\\ 4s-3,\text{当 } p\equiv 3(\bmod 4)\text{ 时}\end{cases}\quad s\in N \tag{8}$$

故从式(5)和式(8)可得式(4)。引理证完。

引理 2.4 当 $p>3$ 时的素因数 q 都可表示成 $q=8sp+1$ 或者

$$q=\begin{cases}(8s-6)p+1,\text{当 } p\equiv 1(\bmod 4)\text{ 时}\\ (8s-2)p+1,\text{当 } p\equiv 3(\bmod 4)\text{ 时}\end{cases} \tag{9}$$

式中:s 是正整数。

证明 本引理的证明方法与引理 2.3 相同。因为 $2-(-1)=3<p$,所以从引理 2.2 可知 $\frac{1}{3}(2^p+1)$ 的素因数 q 都满足 $q\equiv 1(\bmod 2p)$,因此 q 可表示成式(5)之形。又因 $-2^p\equiv -2(2^{(p-1)/2})^2\equiv 1(\bmod q)$,所以 -2 是模 q 的二次剩余,故从引理 2.1 可知 $q\equiv 1$ 或 $3(\bmod 8)$。

当 $q\equiv 1(\bmod 8)$ 时,从(2.2)可知 $q=8sp+1$。当 $q\equiv 3(\bmod 8)$ 时,因为从(5)可知 $tp=1(\bmod 4)$,故从

$$t=\begin{cases}1(\bmod 4),\text{当 } p\equiv 1(\bmod 4)\text{ 时,}\\ 3(\bmod 4),\text{当 } p\equiv 3(\bmod 4)\text{ 时,}\end{cases} \tag{10}$$

可得式(9)。引理证完。

引理 2.5 如果

$$n=p_l^{r_i}\cdots p_k^{r_k} \tag{11}$$

是 n 的标准分解式,则 $S(n)=\max\{S(p_1^{r_1}),\cdots,S(p_k^{r_k})\}$。

证明 参见文[2]。

引理 2.6 如果 x 和 y 是适合 $x<y$ 的正整数,则 $S(p^x)\leqslant S(p^y)$。

证明 参见文[2]。

引理 2.7 $S(p)=p$。

证明 参见文[2]。

引理 2.8 $S(n)\geqslant p(n)$。

证明 设式(11)是 n 的标准分解式。从引理 2.6 和 2.7 可知

$$S(p_i^{r_i})\geqslant S(p_i)=p_i,i=1,2,\cdots,k \tag{12}$$

因此根据引理 2.5,从(12)可得 $S(n)=\max\{S(p_1^{r_1}),\cdots,S(p_k^{r_k})\}\geqslant\max\{S(p_1),\cdots,S(p_k)\}=\max\{p_1,\cdots,P_k\}=P(n)$。引理证完。

引理 2.9 方程

$$X^m-Y^n=1,X,Y,m,n\in N,\min\{X,Y,n,n\}>1 \tag{13}$$

仅有解$(X,Y,m,n)=(3,2,2,3)$。

证明 参见文[3]。

引理 2.10 方程

$$2^p+1=3Y^n,Y,n\in N,Y>1,n>2 \tag{14}$$

无解(Y,n)。

证明　参见文[4]。

2　定理的证明

设 p 是适合 $p>7$ 的奇素数,此时 $p\geqslant 11$。首先讨论 $S(2^p-1)$ 的下界,设

$$2^p-1=p_1^{r_1}\cdots p_k^{r_k} \tag{15}$$

是 2^p-1 的标准分解式,其中 $p_1,\cdots,p_k$ 是适合

$$p_1<\cdots<p_k \tag{16}$$

的奇素数,$r_1,\cdots,r_k$ 是正整数。

当 $k=1$ 且 $r_1=1$ 时,从式(15)可知 2^p-1 的最大素因数 $P(2^p-1)=p_1=2^p-1$。由于 $p\geqslant 11$,因此有 $p(2^p-1)>8p+1$。

当 $k=1$ 且 $r_1>1$ 时,从式(15)可知方程(13)有解 $(X,Y,m,n)=(2,p_1,p,r_1)$。然而,根据引理 2.9 可知这是不可能的。

当 $k>1$ 时,从引理 2.3 可知 $p_1\geqslant 2p+1$ 以及 $p_2\geqslant 8p+1$,所以此时 $p(2^p-1)\geqslant p_2=8p+1$。

从以上的分析可知 $p(2^p-1)\geqslant 8p+1$,又从引理 2.8 可得 $S(2^p-1)\geqslant p(2^p-1)$,故有

$$S(2^p-1)\geqslant 8p+1 \tag{17}$$

以下讨论 $S(2^p+1)$ 的下界。设

$$\frac{1}{3}(2^p+1)=p_1^{r_1}\cdots p_k^{r_k} \tag{18}$$

是 $\frac{1}{3}(2^p+1)$ 的标准分解式,其中 $p_1,\cdots,p_k$ 是适合式(16)的奇素数,$r_1,\cdots,r_k$ 是正整数。

当 $k=1$ 且 $r_1=1$ 时,因为 $p\geqslant 11$,故从(18)可得 $p\left(\frac{1}{3}(2^p+1)\right)=\frac{1}{3}(2^p+1)>8p+1$。

当 $k=1$ 且 $r_1=2$ 时,因 $p_1^{r_1}\equiv p_1^2\equiv 1\pmod 8$,故从(18)可得 $1\equiv 2^p+1\equiv 3p_1^2\equiv 3\pmod 8$ 这一矛盾。

当 $k=1$ 且 $r_1>2$ 时,从(18)可知方程(14)有解 $(Y,n)=(p_1,r_1)$。然而从引理 2.10 可知是不可能的。

当 $k>1$ 时,根据引理 2.4,从(16)和(18)可得 $p_1\geqslant 2p+1$ 以及 $p_2\geqslant 8p+1$,所以 $p\left(\frac{1}{3}(2^p+1)\right)=p_2>8p+1$。

由于从上述分析可知

$$p(2^p+1)=p\left(\frac{1}{3}(2^p+1)\right)>8p+1 \tag{19}$$

所以根据引理 2.8,从(19)可得

$$S(2^p+1)\geqslant 8p+1 \tag{20}$$

于是从(17)和(20)可知本定理成立。证完。

综上所述,本文运用初等方法讨论了 $S(2^p\pm 1)$ 的下界,其中 $S(2p\pm 1)$ 是 $2p\pm 1$ 的 Smarandache 函数,并证明了:当 $p>7$ 时,$S(2^p\pm 1)\geqslant 8p+1$。

参考文献

[1] 张文鹏. 初等数论[M]. 西安:陕西师范大学出版社,2007.
[2] 徐哲峰. Smarandache 幂函数的均值[J]. 数学学报,2006,49(1):77-80.
[3] 徐哲峰. Smarandache 幂函数的分布性质[J]. 数学学报,2006,49(5):1009-1012.
[4] 李洁. 一个包含 Smarandache 原函数的方程[J]. 数学学报,2007,50(2):333-336.
[5] 马金萍,刘宝利. 一个包含 Smarandach 函数的方程[J]. 数学学报,2007,50(5):1185-1190.
[6] 朱伟义. 一个包含 F. Smarandache LCM 函数的猜想[J]. 数学学报,2008,51(5):955-958.
[7] 贺艳峰,潘晓玮. 一个包含 Smarandache LCM 函数的方程[J]. 数学学报,2008,51(4):779-786.

[8] Le M H. A lower bound for $S(2^{p-1}(2^p-1))$ [J]. Smarandache Notions J., 2001, 12(1): 217-218.
[9] 苏娟丽. 关于 Smarandache 函数的一个新的下界的估计 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2008, 24(4): 706-708.
[10] 华罗庚. 数论导引 [M]. 北京: 科学出版社, 1979.
[11] Birkhoff G D, Vandiver H S. On the integral divisors of $a^n - b^n$ [J]. Ann. of math., 1904, 5(2): 173-180.
[12] Balacenoiu I, Seleacu V. History of the Smarandache function [J]. Smarandache Nations J., 1999, 10(1): 192-201.
[13] Mihăilescu P. Primary cyclotomic units and a proof of Catalan's conjecture [J]. J. Reine Angew. Math., 2004(572): 167-195.
[14] Bugeaud Y, Cao Z F, Mignotte M. On simple K4-groups [J]. J. Algebra, 2001, 241(2): 658-668.

A Lower Bound for the Values of Smarandache Function of Mersenne Numbers

Liang Ming

(Department of Mathematics, Guangdong University of Petrochemical Technology, Maoming 525000, China)

Abstract: Let ρ be an odd prime. In this paper, certain elementary methods are used, and the lower bounds for $S(2^p \pm 1)$ are discussed, where $S(2^p \pm 1)$ is the Smarandache function of $2^p \pm 1$. We prove that if $p > 7$, then $S(2^p \pm 1) \geqslant 8p + 1$.

Key words: Mersenne number; Smarandache function; Lower bound

(责任编辑: 梁晓道)

(上接第 43 页)

[5] 贺定勇. 电弧喷涂粉芯丝材及其涂层的磨损特性研究 [D]. 北京: 北京工业大学, 2004.
[6] 傅斌友, 贺定勇. 电弧喷涂铁基非晶涂层的结构与性能 [J]. 焊接学报, 2009, 30(4): 53-56.
[6] FU Binyou, HE Dingyong, ZHAO LiDong, et al. Microstructures and Properties of Arc Spraying Coatings Containing Fe-based amorphous phase [J]. Transactions of the China Welding Institution, 2009, 30(4): 53-56.
[7] 栾军. 现代试验设计优化方法 [M]. 上海: 上海交通大学出版社, 1995: 254-262.
[8] 黄林兵. 电弧喷涂药芯焊丝及涂层性能研究 [D]. 武汉: 华中科技大学, 2011.

Effect of Parameters on Adhesion Strength of the Arc Sprayed 4Cr13 Alloying Coatings

DENG Yu[1], YU Shengfu[2], HUANG Linbing[2]

(1. College of Mechanical and Electrical Engineering, Guangdong University of Petrochemical Technology, Maoming 525000, China;
2. College of Materials Science and Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract: Orthogonal test is performed by using the four main process parameters of the high velocity arc spraying as factors, which are spraying current, spraying distance, spraying voltage and atomizing air pressure. Each factor has three levels. Coatings are prepared on the Q235 steel plate by. high velocity arc spraying equipment with self-made new kind of 4Cr13 cored wire, and study influence law of parameters on adhesion strength between the basic material and the coatings, which can obtain the optimal process parameters of arc spraying, and lay a good foundation for preparing coatings with great comprehensive capability.

Key words: 4Cr13; Coatings; High velocity arc spraying (HVAS); Adhesion strength; Process parameters

(责任编辑: 朱冠华)